数学の研究を始めよう (V)
オイラーをモデルに数論研究
はじめに、付録, あとがき

飯高 茂

平成 30 年 3 月 11 日

1　はじめに

2017 年 12 月 25 日に広尾学園で数学研究集会 X'Math が開かれた. これは高校生による数学研究の発表会であり, 当時小学 4 年生の高橋洋翔君もゲスト出演し $a = mp$ 問題について研究発表を行った.(付録参照)

私は高校生の数学研究を励ますような内容の 15 分講義を依頼され, 当時話題沸騰の abc 予想について話した. 難解な理論であり私の理解もはなはだ不十分であったが, 高校生にも分かるように話をした.　本書の第 1 章でその予稿 2 ページを載せている.

本書は 2017 年 10 月に刊行された『完全数の新しい世界』を引き継ぎ, 高校生の数学研究に役立つことを意図して執筆したものである. 同時にこれは『 数学の研究を始めよう』シリーズの 5 冊目である. 執筆上留意したことは本書を前作と独立に読める本にすることである. したがって前作を読まれた方は既読の内容があることに気づくであろう. 数学の本を読むことは簡単ではない. 意欲的にかなり努力してがんばらないと理解できないことも多い. 既知の内容であれば気楽に楽しく読めるからボーナスのようなものとご理解いただきたい.

ここで, 本書の題名『オイラーをモデルに数論研究』について少し説明する.

$\sigma(a)$ で自然数 a の約数の和を表す.$\sigma(a) = 2a$ を満たす自然数 a はユークリッド以来完全数と呼ばれている.

図 1: 目を患ったオイラー

オイラー (1707-1783) は数学の歴史において最も傑出した存在ともいわれる大数学者である.4 世紀の学者ヤンブリコスの予想 「完全数は $2^e q, (q = 2^{e+1} - 1 :$ 素数$)$ の形 (ユークリッドの完全数と

いう) に書けるか」の解決に努め, 偶数の仮定のもとで肯定的に解決した. これは完全数の歴史において最初の大きな成果であった. しかし, 彼の論文は生前には出されず, 没後公表された. これは理解に苦しむことに思えた.

ヤンブリコスの予想を証明するときオイラーは解が偶数を仮定した. このことを彼自身が許せなかったのではないだろうか. 奇数完全数の不存在を示してから完全な形で証明を発表したかったのかもしれない.

しかし, 現代数学の偉大な発展をもってしても奇数完全数の問題は解けていない.

そこで, 奇数完全数の問題に類似した問題は, 現代数学では解けないに違いないので奇数完全数と類似した問題は, 奇数完全数の罠と呼んで回避するとしよう.

したがってオイラーが偶数に限って完全数の問題を解決したことは正しい選択であり, これを研究のモデルと考えてもよいだろう.

完全数の概念を少し一般化し $a = 6p$ 問題から出てきた 自然数 a についての方程式 $\sigma(a) = 2a+12$ を研究した.

p を 5 より大きい素数とすると $6p$ が $\sigma(a) = 2a+12$ の解になることはすぐわかる.$24 = 6*4, 54 = 6*9$ も解になる. このほかに $304 = 2^4 * 19$ のような不思議な形の解もありこれらをエイリアン解という.

さて $\sigma(a) = 2a + 12$ の解を求めるにあたり, オイラーにならって a を偶数に限ってもなお決定できない. しかし, 6 の倍数を仮定すれば解ける.

$\sigma(a) = 2a + 12$ の解を -12 だけ平行移動した完全数ということにした. しかし歴史的には過剰度 12 の過剰数 (abundant number) という. このような指摘を読者から受けた.

完全数の概念を一般化するにあたって, 平行移動を考えると良いことが分かってきた. これを水平的展開という. さて, 元祖完全数では 2 のべきを考えたので 2 を奇素数 P に置き換える. すなわち $q = \sigma(P^e)$ が素数の場合に $a = P^e q$ を考え, これを究極の完全数と言う. このような一般化を垂直的展開という.

水平的展開および垂直的展開を考えることで完全数として研究すべき対象は大きく拡がったが解けない難問が累積してしまう. そこで打開策として, ユークリッド関数の代わりにオイラー関数を用いて完全数の類似物を構成することに努めた. 一般的にいってオイラー関数の方が研究しやすい.

東京神田の書店「書泉グランデ」で月 2 回開く, 一般市民対象の数学の講義の受講者である矢崎さんからスリャナリャナさんによるスーパー完全数の論文を紹介された.

$\sigma(\sigma(a)) = 2a$ を満たす a をスーパー完全数という. a が偶数ならこれは完全数の 2 べき部分になることが証明されていた.

これは不思議議な結果であり, ネットでも super perfect numbers はしばしば取り上げられている. しかしこれ以上の面白い結果はないようだった.

図 2: スーパー完全数 (胸に Euler)

そこでスーパー完全数の水平的展開および垂直的展開を考えてみたところ驚くほど豊穣な世界が広がっていることがわかった.

高橋洋翔君は $\sigma(\sigma(a)) = 2a$ をさらに深めて $\sigma(\sigma(\sigma(a))) = 4a - 1$ を考えた.

パソコンで計算すると, この複雑な方程式の解はやはり完全数の 2 べき部分になるらしいことがわかった. そこでこれについても水平的展開および垂直的展開を考えることになった.

「この複雑そうな方程式の解はウルトラ完全数というのがいいと思う.

けれど良い結果が出ないと, 名前負けして笑われるだけだよ.」

このような会話が高橋君と私の間であった.

図 3: ウルトラ完全数 (胸に多面体をつけている, 襟にはゼータ関数の値)

意外なことに, スーパーオイラー完全数, ウルトラオイラー完全数から双子素数の一般化 (スーパー双子素数) およびウルトラ三つ子素数が堰を切ったように出てきた.

ウルトラ三つ子素数は宇宙のできる前から存在していたことは疑う余地がない. 2018 年になってから東京で高橋君協力のもとにウルトラ三つ子素数が続々と発見されたのである. 私は不思議な感動に包まれた.

パソコンで多くのウルトラ三つ子素数を作り出すことはできたがなぜ彼らがここにいるのだろうか. これを説明する数学ができていない.

例をあげよう. $p, q = 8p - 17, r = q + 18$ 　がすべて素数になる素数 p が $5, 11, 107, 131, \cdots$ としてたぶん無数にある. しかも $a = 16p$ は -19 だけ平行移動したウルトラオイラー完全数になっている.

表 1: ウルトラ三つ子素数 (p, q, r) の例

p	$q = 8p - 17$	$r = q + 18$
5	23	41
11	71	89
107	839	857
131	1031	1049

本書では高校生のすばらしい研究結果も報告される. 例をあげておこう.

- 第 1 章で広尾学園高校生の $a = 21p$ 問題の解決,
- 第 3 章では飯山高校生によるオイラー余関数の新しい評価式,
- 第 4 章では広尾学園高校生による高次オイラー関数の新しい公式の発見,
- 第 5 章でやはり広尾学園高校生によるオイラー余関数のギャップ値の研究

大学受験の成績を至上の目的としがちな高校の数学教育の現場でこのような自立的研究を促す動きが現れたきた. このことは世間であまり知られていない. しかし日本の将来に希望をもたらす動きである.

放送大学東京多摩学習センター学生控え室にて
2018 年 2 月 3 日

飯高　茂

2　付録

3　高橋君の発表したパワポのファイル

$a = mp$ 問題
エイリアン解の侵入
東京都世田谷区立池之上小学校４年
高橋洋翔

4　高橋君からのチャレンジ問題

高橋君に頼んで読者にチャレンジ問題を出してもらいました.

やさしい問題

$\langle 1\rangle$ $\sigma(\sigma(a)+1)=a+3$ を満たす a は何か.

$\langle 2\rangle$ $\varphi(2\varphi(a)+3)=2a$ を満たす a は何か.

$\langle 3\rangle$ $\sigma(\sigma(\sigma(a)+3)+1)=a+7$ を満たす a は何か.

$\langle 4\rangle$ $\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(a)+3)+5)+3)=a+7$ を満たす a は何か.

難しい問題 (未解決問題 を含む)

$\langle 1\rangle$ $\sigma(\sigma(a)+6n)=2a+6n$ (n :自然数) のとき a は平方数になるか

$\langle 2\rangle$ $\sigma(\varphi(a)+3)=a+3$ を満たす a は何か.

$\langle 3\rangle$ $\sigma(\sigma(a))=8\varphi(\varphi(a))$ を満たす a は何か.

$\langle 4\rangle$ $(p-1)^2\sigma(a)=p^2\varphi(a)-(p-1)$ (p :素数) を満たす a は何か.

$\langle 5\rangle$ $2^n\varphi^n(a)=a$(n :自然数) を満たす a は何か. ($\varphi^n(a)=a$ は $\varphi(a)$ の n 回合成)

やさしい問題は高橋君が創始し自分で解きました. 難しい問題に挑戦してみよう.
共同して考えても良いのです. 解けた方は 飯高茂あてご一報下さい.

address iitakashigeru@gmail.com

HomePage:
iitakashigeru.math-academy.net

5　あとがき

ここで, 本書執筆の内情に触れてみたい. 現代数学社の月刊誌『現代数学』で連載「数学の研究をはじめよう」が開始されたのは 2013 年 4 月だった. 当初は 2 年程度を目処に始めたものの研究が発展し連載を打ちきる時を見失った.

２年過ぎたころ連載をまとめて本にすることになった. まとめて印刷したら 500 ページほどになった. これは大部なので高価な本になり高校生では買えない値段になりそうなので, とりあえず 3 冊に分けて出した.

連載をまとめて本は作るのは確かに楽だが, やや物足りなさを感じたので 4 冊目になる前作を作るにあたり シリーズ名「数学の研究をはじめよう (IV)」を控えめにし『完全数の新しい世界』というタイトルを前面に出し大幅な加筆をした. スーパー完全数の理論展開がうまく行き, 十分魅力的になる算段がついたからである.

今回はこの流れをさらに発展させ, シリーズ名「数学の研究をはじめよう (V)」をサブのタイトル名を『オイラーをモデルに数論研究』とし 書き下ろし半分, 連載まとめを半分にした.

前作では帯に「10 歳の数学少年と 75 歳の数学者の共同研究」と書いて世間を驚かす作戦に出た.

本書では「10 歳の数学少年と 75 歳の数学者の共同研究 第 2 弾」とする. このことは最初から決めていた.

スーパー完全数とウルトラ完全数をイメージできるイラスト (作画:飯高順) を入れた. これはいかにも小学生好みだと受け取られるかもしれないが実際は著者自身の趣味の反映に過ぎない.

今回もいろいろな人に世話になったが, 多すぎるのでとくに名前はあげず感謝の気持ちをここに記すにとどめる. 始めからずっと応援し助力を惜しまない宮本憲一さんには特に世話になった. 最後に特記して感謝したい.

参考文献

[1] S.Iitaka, 群論, これは面白い 2013 年, 共立出版社.

[2] S.Iitaka, 環論, これは面白い 2013 年, 共立出版社.

[3] S.Iitaka, 体論, これは面白い 2013 年, 共立出版社.

[4] S.Iitaka, 数学の研究をはじめよう (I) 2016 年 現代数学社.

[5] S.Iitaka, 数学の研究をはじめよう (II) 2016 年 現代数学社.

[6] S.Iitaka, 数学の研究をはじめよう (III) 2017 年 現代数学社.

[7] S.Iitaka, 数学の研究をはじめよう (IV), 完全数の新しい世界 2017 年 現代数学社.

[8] L.E.Dickson , History of the Theory of Numbers, Dover Books on Mathematics,2005,

[9] H. ラーデマッヘル, O. テープリッツ (著), 山崎 三郎 (翻訳), 鹿野 健 (翻訳)　数と図形 (ちくま学芸文庫) 文庫 2010 年, 筑摩書房

[10] A.Weil, 足立恒雄・三宅克哉訳, 数論　歴史からのアプローチ,1987 年 日本評論社